УДК 1
Н-64

Никонов Олег Александрович
кандидат философских наук,
Мурманский государственный технический университет.
Oleg.Nikonov@Rambler.ru

Становление аналитической геометрии и принцип дополнительности

Аннотация:
В статье рассматриваются вопросы истории становления аналитической геометрии. Эта область геометрии является одной из ступеней перехода от евклидовой геометрии к неевклидовой. Основными методологическими принципами данной теории являются: принцип непрерывности Лейбница и принцип дополнительности Бора. Аналитическая геометрия не поглотилась неевклидовой геометрией, а продолжает развиваться и является одной из основ современной математики.
Ключевые слова: аналитическая геометрия, принцип дополнительности, евклидова геометрия, принцип непрерывности Лейбница, принцип дополнительности Бора.

1. Введение

Подобно общественным революциям, научная революция Нового времени не была одноактным событием. Первый этап ее продолжался около двухсот лет – от Коперника до Ньютона. В течение XVI и XVII вв. она охватила ряд областей знаний, прежде всего астрономию, затем почти одновременно и совместно механику и математику [1, т. 2, с. 7].

Математика в XVII в. развивалась не только при решении практических задач или задач физических наук. На этом этапе, как и в другие эпохи, она не нуждалась в постоянном обращении к практике: в ней происходило внутреннее саморазвитие, наиболее быстрое и успешное в тех отделах, которые обещали принести богатые плоды в науках о природе.

В связи с этим следует высоко оценить роль античного наследия, значительно возросшую в эпоху Возрождения. В трудах древних греков математики Нового времени смогли почерпнуть многие идеи, ставшие отправным пунктом их дальнейшего творчества. Античные идеи могли обрести теперь новую жизнь именно потому, что оказались созвучными требованиям времени.

2. Особенности математики XVII в.

К концу XVI в. Математика складывалась из арифметики и алгебры, геометрии и тригонометрии. Это была по преимуществу математика постоянных величин, хотя в алгебраическом исчислении появились уже переменные параметры. Идея непрерывной функции, зародившаяся в средние века, не получила еще развития, так же как и идея предельного перехода, фактически содержащаяся в античном методе исчерпания [2, с. 95–168].

В XVII в. математические исследования значительно расширяются, и возникает несколько новых наук: аналитическая геометрия, проективная геометрия, теория вероятностей, а главное исчисление бесконечно малых, включающее, ростки новых дисциплин – теории бесконечных рядов, интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, дифференциальная геометрия. Вместе с тем продолжались работы по алгебре и тригонометрии, были созданы разнообразные методы приближенных вычислений, решены отдельные трудные задачи теории чисел и т.д.

За один этот век математика обогатилась большим числом понятий и методов, чем за предыдущие пятнадцать. Однако значение сделанных открытий было для науки этой эпохи далеко неравноценным. Теория чисел находилась еще в стадии решения частных проблем и привлекала немногих; среди них был Ферма, но только после работ Эйлера и Лагранжа теория чисел стала подлинной наукой. Работы Дезарга по проективной геометрии не нашли в XVII в. достойного продолжения, если не считать превосходных изысканий Паскаля; затем они были прочно забыты. Точно также не привлекло в то время последователей употребление проективных методов Ньютоном. В результате проективная геометрия возродилась только в первой половине XIX в. В теории вероятностей до Я. Бернулли также сделаны были лишь первые шаги, а открытый им закон больших чисел был опубликован уже в начале следующего столетия.

Ф. Энгельс характеризовал революцию в математике XVII в. следующим образом: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*» [3, т. 22, с. 224].

3. Принцип непрерывности Лейбница

Важную роль в становлении математики на этом этапе сыграл принцип непрерывности Лейбница [4, т. 2, с. 157]. Сформулировать этот принцип можно следующим образом: если среди данных или принятых явлений различие двух явлений может стать меньше всякой данной величины, то оно вместе с тем необходимо станет меньше всякой величины и у искомых или последующих, вытекающих из данных. Или же, если выразиться иначе: если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми). Это зависит от следующего более общего принципа: если упорядочены данные, то упорядочены и искомые.

4. Возникновение аналитической геометрии

В первой половине XVII в. возникла совершенно новая ветвь математики, так называемая аналитическая геометрия, устанавливающая связь между линиями на плоскости и алгебраическими уравнениями с двумя неизвестными.

Произошел довольно редкий в математике случай: за одно-два десятилетия появилась большая, совсем новая часть математики, основанная на очень простой идее, на которую, однако, до того не обращали должного внимания. Появление Аналитической геометрии в первой половине XVII в. было не случайным. Переход в Европе к новой, капиталистической форме производства потребовал усовершенствований в целом ряде наук. Только что Галилеем и другими учеными начала создаваться современная механика, во всех областях естествознания накапливались опытные данные, совершенствовались средства наблюдения, вместо устаревших схоластических теорий создавались новые. В астрономии среди передовых ученых восторжествовало учение Коперника. Мощное развитие дальнего мореплавания настойчиво требовало знания астрономии и механики. В механике нуждалось и военное дело. Эллипсы и параболы, геометрические свойства которых, как конических сечений, были уже подробно известны еще древним грекам почти за 2000 лет, перед тем как перестали быть предметами только геометрии, какими они были у греков. После того как Кеплер открыл, что планеты обращаются вокруг Солнца по эллипсам, Галилей – что брошенный камень летит по параболе, надо было вычислять эти эллипсы, находить те параболы, по которым летят ядра из пушек; надо было отыскать тот закон, по которому убывает с высотой атмосферное давление, открытое Паскалем; надо было фактически вычислять объемы самых различных тел и т.д. и т.п. Все эти вопросы вызвали к жизни почти одновременно три совсем новые математические науки: аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление (включая решение простейших дифференциальных уравнений) [5, т. 2, с. 180].

Координатные отрезки древнегреческой геометрии стали известны в Европе частью по арабским сочинениям, но главным образом по трудам Архимеда и особенно Аполлония.

В разработке начал новой аналитической геометрии независимо друг от друга и одновременно приступили два крупнейших французских математика XVII в. – Ферма и Декарт. Небольшое «Введение в изучение плоских и телесных мест» (Ad locos planos et solidos isagoge) Ферма было написано несколько ранее 1637 г., но при жизни Ферма распространялось через Мерсенна и других только в рукописном виде. «Плоские и телесные места» – термины греческой геометрии – означали прямые и окружности и соответственно эллипсы, параболы и гиперболы. Работа написана в обозначениях Виета с соблюдением однородности уравнений.

Ферма формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины (quantitates ignotae), налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию… Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин» [6, т. 2, с. 103].

«Введение» Ферма, долгое время остававшееся в рукописи, не нашло того широкого распространения, какое получила «Геометрия» Декарта, изданная в 1637 г. Все основные идеи «всеобщей математики», как в алгебраической, так и в геометрической части, имелись у ее творца не позднее 1632 г.

5. Принцип дополнительности

Аналитическая геометрия объединила геометрический и алгебраический подходы к изучению математических объектов. Объединение двух ранее взаимоисключающих подходов в теории, на наш взгляд, можно рассматривать как проявление сформулированного физиками в начале XX в. принципа дополнительности.

Попытка постижения сути квантовомеханических явлений вообще и двойственности природы электрона в частности привели Н. Бора в 1927 г. к формулировке принципа дополнительности. Приводится следующая его формулировка: «Для описания квантовомеханических явлений необходимо применять два взаимоисключающих («дополнительных») набора классических понятий, совокупность которых дает исчерпывающую информацию об этих явлениях как о целостных» [7, с. 385]. Н. Бор постулировал, что несовместимости (с точки зрения классической физики) в мире элементарных частиц, не исключают, а дополняют друг друга, как, например, волновое и корпускулярное представление электрона. Уже в первой статье «Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории», излагающей концепцию дополнительности, Н. Бор указал, что ситуация, сложившаяся в связи с проблемой интерпретации квантовой механики, имеет далеко идущую аналогию с общими трудностями образования человеческих понятий, возникающими из разделения субъекта и объекта» [8, т. 2, с. 53].

Роль принципа дополнительности в различных областях знания отражена в работах М.В. Волькенштейна [9], Г.В. Гивишвили и других авторов.

Поскольку абсолютный покой является фикцией на всех уровнях организации материи, это означает одно: пространство и время неотделимы друг от друга, хотя и не взаимно тождественны. Вместе с тем они и не противоположны друг другу, между ними нет никакой борьбы, никаких противоречий. Отношения между ними описываются не в терминах традиционного дуализма, а в соответствии с принципом дополнительности Н. Бора.

Проблема состоит во взаимоотношении материальной субстанции вещества-излучения с нематериальной сущностью, то есть с временем-пространством. Пространство, как и время, не обладает ни одним свойством, присущим физическим телам и полям. Пространство не участвует ни в каких взаимодействиях или явлениях, но наличествует во всех сразу наблюдаемых в природе процессах как арена, на которой они происходят. Оно не представляет собой посредника, источника или результата каких-либо реакций между различными видами материальных тел в том или ином их состоянии. В этом смысле пространство не является физическим объектом или субъектом. Его можно рассматривать как способность тел, элементарных частиц совершать движения, то есть существовать. Оно, наряду со временем, есть способ существования материи, не ее разновидность. Поэтому есть все основания утверждать, что материя находится с пространством-временем не в генетической или причинноследственной связи, а в отношениях, подпадающих под принцип дополнительности [10, с. 75].

6. Две идеи Декарта.

Идея координат. Координатами точки на плоскости Декарт называет абсциссу и ординату этой точки, то есть численные величины и ее расстояний (с соответствующими знаками) до двух выбранных на этой плоскости взаимно перпендикулярных прямых (координатных осей). Точка пересечения координатных осей называется *началом координат*.

Введением координат Декарт произвел, как говорят, «арифметизацию» плоскости. Вместо того, чтобы как-либо геометрически указывать точку, достаточно задать пару чисел x, y и обратно.

Идея сопоставления уравнения с двумя неизвестными линий на плоскости. Вторая идея Декарта следующая. До Декарта, в случае если имелось одно алгебраическое уравнение с двумя неизвестными, говорили, что задача неопределенная, так как неизвестных этих нельзя из него определить. Такое «неопределенное» уравнение не считали интересным [11, с. 342–343].

Декарт посмотрел на дело иначе. Он предложил в уравнении с двумя неизвестными x считать абсциссой точки, а соответствующее ему y – ее ординатой. Тогда если менять непрерывно x, то для каждого из этих x вычисляется из уравнения свое вполне определенное y, и, следовательно, получается, вообще говоря, совокупность точек, образующих линию.

Таким образом, всякому алгебраическому уравнению с двумя переменными соответствует некоторая вполне определенная линия на плоскости, а именно, линия, представляющая собой совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению. Это замечание Декарта *открыло целую новую науку*.

7. Основные задачи, решаемые аналитической геометрией. Аналитическая геометрия дает возможность: 1) задачи на плоскости решать вычислением; 2) находить уравнения кривых, заданных каким-либо геометрическим свойством; доказывать новые геометрические теоремы алгебраически; 4) представляя алгебраическое уравнение геометрически, выяснить его алгебраические свойства.

Аналитическая геометрия есть, таким образом, та часть математики, которая, применяя координатный метод, исследует геометрические объект средствами алгебры.

8. Результат Декарта относительно уравнения 2-й степени. Декарт исследовал также вопрос о том, какие линии на плоскости выражает уравнение 2-й степени с двумя переменными, и показал, что такое уравнение, вообще говоря, выражает эллипсы, гиперболы или параболы – кривые, хорошо известные математикам древности. Таковы важнейшие достижения Декарта. Этим, однако, книга Декарта далеко не ограничивалась; Декарт еще исследует уравнения ряда интересных геометрических мест, рассматривает теоремы о преобразовании алгебраических уравнений. Приводит без доказательства свое знаменитое *правило знаков* для отыскания числа положительных корней уравнения, все корни которого действительные, и, наконец, предлагает замечательный способ для отыскания действительных корней уравнений 3-й и 4-й степени при помощи пересечения параболы с окружностями.

Прежде всего, надо сказать, что изобретатели анализа бесконечно малых уже владели методом Декарта. Будь то вопрос о касательных или нормалях (перпендикулярных к касательным в точках касания) линии или вопрос о максимумах и минимумах функции, линии в данной ее точке и т.д. – всегда рассматривают, прежде всего, по Декарту, уравнение этой линии и затем уже находят уравнение нормали, уравнение касательной и т.д. Поэтому анализ бесконечно малых, дифференциальное и интегральное исчисления были немыслимы без предварительной разработки аналитической геометрии.

Первый, кто в самой аналитической геометрии сделал дальнейший шаг вперед, был Ньютон [12, с. 91–105]. В 1704 г. он рассмотрел теорию линий 3-го порядка, то есть линий, выражаемых уравнениями 3-й степени с двумя неизвестными. В той же работе Ньютон нашел, между прочим, изящную теорему о «диаметрах», соответствующих секущим данного направления [13, т. 1, с. 189].

9. Прямоугольные координаты в пространстве. Заметим, прежде всего, что ни Декарт, ни Ньютон не разрабатывали аналитической геометрии в пространстве. Это сделано было уже позже, в первой половине XVIII в., Клеро и Лагиром. Только через сто лет после Лагранжа математики и физики под влиянием развивающейся тогда теории электричества начали широко рассматривать общую теорию отрезков, имеющих определенную длину и направление, такие отрезки были названы векторами.

Теория векторов имеет большое значение в механике, физике и технике, а ее алгебраическая часть, так называемая алгебра векторов, является сейчас существенной составной частью аналитической геометрии.

10. Преобразования аффинные и ортогональные.

Следующим важным этапом развития аналитической геометрии было введение в нее, и вообще в геометрию, теории преобразований.

«Сжатие» плоскости к прямой – это только частный случай более общих, так называемых, *аффинных* преобразований.

Общие аффинные преобразования. Общее аффинное преобразование плоскости – это такое, при котором заданная сетка равных параллелограммов превращается в произвольную другую сетку равных параллелограммов. Любая точка *M* преобразуется в точку *M’*, имеющую те же координаты относительно новой системы координат, какие *M* имела относительно старой. Преобразуемая точка или фигура называется прообразом, а та, в которую она перешла, – ее образом. Точка *M’*, например, есть образ точки *M*. Можно легко показать, что при общем аффинном преобразовании любая прямая переходит в прямую, параллельные прямые переходят в параллельные, а если точка делит отрезок в некотором отношении, то ее образ делит образ этого отрезка в том же отношении. Кроме того, можно доказать теорему, что любое аффинное преобразование плоскости можно получить, сделав некоторое движение плоскости в себе, как жесткого целого, и затем два «сжатия», к некоторым двум взаимно перпендикулярным прямым.

Совершенно аналогично определяется общее аффинное преобразование пространства как такое, при котором одна система координат преобразуется в некоторую другую, вообще говоря, с другой «метрикой», то есть с другими длинами единичных отрезков и другими углами между ними, а точки *M* – в точки *M’*, имеющие такие же координаты относительно новой системы, какие имели точки *M* относительно старой.

Важнейшие применения аффинных преобразований

1) Применение в геометрии для решения задач на аффинные свойства фигур, то есть такие свойства, которые сохраняются при аффинных преобразованиях, теорема о диаметрах эллипса и задача об описанном треугольнике была примером таких задач. Для решения подобных задач аффинно преобразуют фигуру в какую-нибудь более простую, на ней обнаруживают искомое свойство, а затем возвращаются к исходной фигуре.

2) Применение аналитической геометрии для классификации линий и поверхностей 2-го порядка. Дело в том, что как можно доказать, различные эллипсы родственны друг другу в том смысле, что получаются друг из друга аффинными преобразованиями. Также все гиперболы аффинны друг другу и все параболы аффинны друг другу. Но эллипс в гиперболу или параболу или гипербола в параболу не могут быть превращены ни при каком аффинном преобразовании, то есть они аффинно друг другу не родственны.

11. Ортогональные преобразования. Движения плоскости по себе, как жесткого целого, или такие движения плюс отражение в некоторой прямой, лежащей на плоскости, называются *ортогональными преобразованиями плоскости*, а движения пространства, как жесткого целого, или такие движения плюс отражения пространства в некоторой его плоскости называются *ортогональными преобразованиями пространства.* Очевидно, что ортогональные преобразования – это такие аффинные преобразования, при которых не изменяется «метрика».

12. Теория инвариантов.

Идея инварианта. Инварианты уравнения 2-й степени с двумя переменными. Во второй половине XIX в. было введено еще одно важное новое понятие – понятие «инвариант».

При рассмотрении, например, многочлена 2-й степени с двумя переменными оказывается, что существуют такие выражения, составленные из коэффициентов, которые при этом преобразовании численно не меняются, хотя сами коэффициенты и меняются. Выражения такого рода называются инвариантами по отношению к группе ортогональных преобразований, то есть по отношению к преобразованиям от одних прямоугольных координат к любым другим прямоугольным координатам.

Инвариантом некоторого изучаемого объекта по отношению к некоторым рассматриваемым его преобразованиям называется всякая величина (численная, векторная и т.п.), связанная с этим объектом, которая не изменяется при этих преобразованиях.

13. Преобразования Лоренца являются основой математического аппарата Специальной теории относительности.

Скорость света одинакова во всех равномерно движущихся системах координат независимо от направления его распространения. В более общем виде постулат эквивалентности означает требование, согласно которому законы физики должны иметь один и тот же вид во всех равномерно движущихся системах координат. Из этого следует, что переход из одной такой системы в другую должен сохранять неизменным вид этих законов.

Поскольку в эксперименте было доказано, что скорость света постоянна, то преобразования Галилея, согласно которым скорость должна была изменяться, оказались несостоятельны. Проблему удалось решить, введя время в качестве дополнительной координаты и используя для перехода между двумя системами координат, движущимися равномерно относительно друг друга в этом пространстве-времени преобразования Лоренца [14, т. 1, с. 14–18].

Рассмотрим две системы координат, описывающие четырехмерное пространство-время, так называемое пространство Минковского, где время соответствует четвертой координате. Пусть одна координатная система движется относительно другой с некоторой скоростью. Преобразования Лоренца связывают эти две системы, они сохраняют квадрат 4-вектора в пространстве-времени или величину четырехмерного интервала.

Используя свойства группы Лоренца, легко реализовать планиметрию Лобачевского, а если рассмотреть преобразования Лоренца для общего случая движения точки в пространстве, то и стереометрию Лобачевского, и тем самым показать непротиворечивость геометрии Лобачевского.

Теория преобразований Лоренца, проективная геометрия и теория перспективы и неевклидова геометрия тесно связаны друг с другом. Оказывается, что с ними также в большой мере связана теория так называемых конформных преобразований в теории функций комплексного переменного, решающей такие важные задачи математической физики, как задачу распределения температур в нагретой пластинке, задачу об обтекании воздухом крыла самолета, задачу плоского электрического поля, плоскую задачу теории упругости и многие другие.

14. Многомерная и бесконечномерная аналитическая геометрия, алгебраическая геометрия. Казалось бы, что аналитическая геометрия к XIX в. прошла такой большой путь развития, описанный нами выше в самых общих чертах, и дала столько идей, что она должна была бы себя исчерпать, однако это не так. Как раз в настоящее время бурно развиваются две новые, весьма обширные ветви математики, продолжающие ветви аналитической геометрии, – так называемый *функциональный анализ* и *общая алгебраическая геометрия*. Правда, они только наполовину представляют собою прямое продолжение классической аналитической геометрии: в функциональном анализе много анализа, а в алгебраической геометрии не мало теории функций и топологии.

Еще в середине XIX столетия начали рассматривать четырехмерную и вообще *n*-мерную аналитическую геометрию, то есть стали изучать те вопросы алгебры, которые являются прямым обобщением алгебраических вопросов, изучаемых в двух- и трехмерной аналитической геометрии, но для случая, когда имеется 4 или *n* неизвестных. В самом конце XIX в. ряд выдающихся математиков, работавших в области математического анализа, пришли к мысли, что для целей анализа и математической физики важно рассмотреть бесконечномерную аналитическую геометрию.

Рассуждения, касающиеся бесконечномерного пространства, составляют сейчас большую ветвь математики – функционального анализа. В этом разделе математики одни из самых важных результатов даны в последнее время отечественными учеными.

Бесконечномерная аналитическая геометрия имеет важнейшие практические приложения и играет фундаментальную роль в современной физике.

Что касается алгебраической геометрии, то это – более непосредственное продолжение обычной аналитической геометрии, которая сама в свою очередь есть лишь часть алгебраической геометрии. Алгебраическая геометрия может рассматриваться как та часть математики, которая занимается линиями, поверхностями и гиперповерхностями, выраженными в декартовых координатах алгебраическими уравнениями не только 1-й и 2-й степени, но и высших степеней. Оказалось, что в этих исследованиях удобно рассматривать не только действительные, но и комплексные координаты, то есть рассматривать все так называемое комплексное пространство.

15. Заключение

Аналитическая геометрия является совершенно необходимым математическим методом для изучения других отделов математики, механики, физики и других естественных наук. Поэтому ее изучают не только в университетах, но и во всех высших технических учебных заведениях, а также в некоторых техникумах. Ставится вопрос о включении довольно подробного изложения элементов аналитической геометрии в курсе средней школы.

Существенными частями идеи аналитической геометрии, как мы видели, является метод координат и рассмотрение уравнений, связывающих эти координаты. Кроме декартовых координат, рассматриваются различные другие координаты, например, полярные.

Эта область геометрии является одной из ступеней перехода от евклидовой геометрии к неевклидовой. Основными методологическими принципами данной теории являются: принцип непрерывности Лейбница и принцип дополнительности Бора. Аналитическая геометрия не поглотилась неевклидовой геометрией, а продолжает развиваться и является одной из основ современной математики.

Ссылки:

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. Юшкевича А.П.: в 3-х тт. М., 1970.

2. Архимед. Сочинения. М., 1962.

3. Энгельс Ф. Диалектика природы Маркс К. и Энгельс Ф. Собр. соч.

4. Лейбниц Г.В. Сочинения. М., 1983.

5. Математика: ее содержание, методы и значение / под ред. Александрова А.Д., Колмогорова А.Н., Лаврентьева М.А. В 3-х тт. М., 1956.

6. Цит. по: История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. Юшкевича А.П.: в 3-х тт. М., 1970.

7. Методологические принципы физики. М., 1975.

8. Бор Н. Избранные научные труды. М., 1971.

9. Волькенштейн М.В. Дополнительность, физика и биология // Успехи физических наук. 1985. Февраль. Том 154. Вып. 2.

10. Гивишвили Г.В. принцип дополнительности и эволюция природы // Вопросы философии. 1997. № 4.

11. Декарт Р. Рассуждение о методе. С приложениями. Диоптрика, Метеоры, Геометрия. М., 1953.

12. *Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М., 1989.*
13. *Математика: ее содержание, методы и значение / под ред. Александрова А.Д., Колмогорова А.Н., Лаврентьева М.А. В 3-х тт. М., 1956.*
14. *Эйнштейн А. Собр. науч. трудов. В 4 т. М., 1965.*